А.М. Инков

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ. ЛЕКЦИЯ № 11



Шымкент, 2011

Тема 7 Проблема идентифицируемости

Лекция 11 Проблема идентифицируемости

Здесь нами будут рассмотрены проблема идентифицируемости; системные условия идентифицируемости в разомкнутых системах; системные условия идентифицируемости линейных замкнутых систем; понятие вероятностной идентифицируемости.

Условия идентифицируемости линейных динамических систем.

Рассмотрим задачу идентификации параметров математической модели, заданной в виде системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax\,.$$

Состояние системы задается вектором x(t) n- мерного эвклидового пространства и известны путем измерений следующие векторы

$$x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}, \dddot{x}, \ldots, \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} \qquad (11.1)$$

Задача состоит в нахождении такой матрицы A, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax \\ &\ddot{x} = A\dot{x} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d^n x}{dt^n} = A\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \end{aligned} \qquad (11.2)$$

Состояние системы, заданное известными векторами (11.1), назовем идентифицируемым, если для него существует матрица A, удовлетворяющая равенствам (11.2).

Систему уравнений (11.2) для каждой строки матрицы А $a_j^{\tau} = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn})$ несложно записать системой уравнений:

$$\begin{bmatrix} x^{\tau} \\ \dot{x}^{\tau} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}x^{\tau}}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} \quad a_j = \begin{bmatrix} \frac{dx_j}{dt} \\ \frac{d^2x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix} \text{ для j =1,2,..., n} \qquad (11.3)$$

Условие существования решения задачи идентификации, т.е. систем (3), можно записать в виде

$$\det(x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \neq 0 \qquad (11.4)$$

Из соотношений (11.3) параметры модели можно определить по формулам

$$a_j = \begin{bmatrix} x^{\tau} \\ \dot{x}^{\tau} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}x^{\tau}}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{dx_j}{dt} \\ \frac{d^2x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix}; \text{ для j =1,2,..., n} \qquad (11.5)$$

Подставим соотношения (11.2) в условие (11.4), получим неравенство:

$$\det (x, Ax, ... , An\text{-}1x) \neq 0 \qquad (11.6)$$

Укажем на связь между задачами идентификации и управляемости. Эта связь формулируется так:

- для существования решения задачи идентификации в виде математической модели $\dot{x} = Ax$
- при наблюдении вектора состояния x(t) достаточно, чтобы матрица A и вектор x(t) удовлетворяли условия вполне управляемости
  det (b, Ab, ... , An-1b) ≠0
  где b = x(t).

Поскольку матрица A наперед неизвестна, то на практике условия идентификации проверяют на основании условия (4).

Для дискретных линейных систем управления определение **идентифицируемости** формулируется следующим образом: если по известным значениям векторов x(k), x(k+1), ... , x(k+n) состояние дискретной линейной стационарной системы n-го порядка

x(k+1) = Ax(k)

можно восстановить матрицу A, то систему называют идентифицируемой.

Теорема. Решение задачи идентификации дискретной линейной системы имеет место, если
det (x(k), x(k+1), ... , x(k+n-1)) ≠0

Понятие вероятностной идентифицируемости.

Отправная точка в суждениях о потенциальной идентифицируемости системы безотносительно к методу восстановления ее параметров - как и управляемость или наблюдаемость - это свойство сугубо потенциальное, состоит в доказательстве отсутствия другой какой-либо другой системы на выбранном классе систем, которая ведет себя точно также, как и исходная система, и, следовательно, такие системы принципиально неразличимы в выбранных для идентификации условиях. Восстановить однозначно параметры такой системы нельзя. Этот подход позволяет доказать ряд теорем и вывести критерии, сходные с критериями Калмана и Ли. Существуют и принципиально неидентифицируемые системы, для которых невозможно выбрать подходящие условия, ведущие к их идентификации. Всегда находится какой-либо смежник. Покажем это.

Идентифицируемость автономных систем. Модель линейной автономной динамической системы имеет вид:

$dx/dt=Ax$,

где x - вектор состояния (пространства R^n), $x_0=x(0)$.

Определение. Линейная автономная динамическая система называется полностью идентифицируемой по состоянию, если при заданном векторе начальных условий x_0 матрица ее параметров A может быть однозначно восстановлена по временной последовательности $x=x(t)$.

Иначе, тоже следуя калмановской традиции, пара (A,x_0) полностью идентифицируема тогда и только тогда, когда множество пар, объединенных общностью интегральной кривой $x=x(t)$, вырождается в точку. В противном случае указанная пара неидентифицируема. Публикуемый ниже критерий идентифицируемости напоминает критерии управляемости и наблюдаемости.

Теорема 1. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары (A,x_0) состоит в следующем:

$$\mathrm{rank}[x_0\ Ax_0\ A^2x_0\ \dots\ A^{n-1}x_0] = n,$$

где n - порядок системы. Матрицу, выписанную в квадратных скобках, будем называть матрицей идентифицируемости и обозначать W.

Доказательство. Опирается на разложение матричной экспоненты в конечную сумму слагаемых

$e^{At}=\sum_0^{m-1}\alpha_k(t)A^k$,

где m - степень минимального аннулирующего полинома A, $\alpha_k(t)$ - коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа-Сильвестра для экспоненциальной функции, определенной на спектре A.

У пар (A,x_0) и (B,x_0), объединенных общностью интегральной кривой, равны и производные процессов, т.е. $Ax(t)=Bx(t)$, где $x(t)=e^{At}x_0$. Функции $\alpha_k(t)$ линейно независимы между собой на любом интервале времени, что позволяет перейти к матричному уравнению:

$$(A-B)[x_0\ Ax_0\ A^2x_0\ \dots\ A^{m-1}x_0]=0.$$

Матрица A является корнем своего минимального аннулирующего полинома, любая ее степень, которая выше m, выражается через предыдущие, поэтому ранг матрицы справа равен рангу матрицы идентифицируемости W. Множество возможных решений сводится в точку B=A тогда и только тогда, когда ранг матрицы идентифицируемости полон. Доказательство окончено.

Дискретные системы. Идентифицируемость непрерывных систем не сводится к вопросу об идентифицируемости дискретных систем, рассмотренных Ли. Матрицу непрерывной системы в принципе нельзя восстановить однозначно по матрице системы, появляющейся в итоге дискретизации: A по значениям e^{AL} и L. Варианты восстановлений рассматривались в работе А.В. Прасолова. Между тем, проверки критериев идентифицируемости соответствующих непрерывной и дискретной систем дадут одинаковый результат, поскольку замена A в W матричной экспонентой e^{AL} для любого L (т.е. матрицей дискретной системы) не сказывается на ее ранге. Критерий идентифицируемости проверить можно даже тогда, когда параметры системы при частном (равномерном) способе составления выборки данных для идентификации найти невозможно.

Идентифицируемость - это свойство системы, а не метода восстановления ее параметров. Это системное свойство, такое же, как управляемость и наблюдаемость. Невозможность построения одного работоспособного регулятора или наблюдающего устройства, не означает невозможность построения другого. Но для неуправляемых и ненаблюдаемых систем решить задачи управления или наблюдения в калмановской их трактовке невозможно. То же самое касается построения идентификаторов. В теоретически разрешимом случае, необходимо либо изменить способ составления выборки, либо измерить производные, что близко один к другому, ввиду известных методов вычисления значений производных.

Идентифицируемость неавтономных систем. Наше рассмотрение будет неполным, без охвата общих описаний уравнений систем в пространстве состояний, а они таковы:

$dx/dt=Ax+bu$, $y=cx(t)$,

где по прежнему x - вектор состояния (пространства R^n), $x_0=x(0)$.

Определение. Линейная динамическая система называется полностью идентифицируемой по состоянию, если при заданном векторе начальных условий x_0 существует управление, при котором параметры A,b,c можно восстановить с точностью до параметров ее канонической формы (наблюдаемости) по временной последовательности x=x(t).

Иначе, пара $((A,b,c),x_0)$ полностью идентифицируема тогда и только тогда, когда существует управление, при котором множество пар, объединенных общностью интегральной кривой x=x(t), вырождается при каноническом ее описании в точку. В противном случае указанная пара неидентифицируема.

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары $((A,b,c),x_0)$ состоит в следующем:

$$\mathrm{rank}[x_0\ Ax_0\ A^2x_0\ \dots\ A^{n-1}x_0\ b\ Ab\ A^2b\ \dots\ A^{n-1}b] = n,$$

где n - порядок системы. Наблюдаемость системы при этом подразумевается, поэтому запишем иначе Rank W_o=n, Rank [W W_c]=n.

Доказательство. Ассиметричное по отношению к матрице наблюдаемости вхождение матрицы управляемости в критерий идентифицируемости диктуется разным значением проблем управляемости и наблюдаемости для нужд идентификации. Ненаблюдаемые системы содержат части, параметры которых восстановить невозможно, поэтому критерий наблюдаемости выписывается особняком как предварительное условие. Вектор состояния канонической формы наблюдаемости можно восстановить, не зная параметров системы, например, при импульсном воздействии. Расширительное толкование принципа дуальности Калмана сводит проблему управляемости системы с парой (A,b) к проблеме идентифицируемости пары (A,b), поскольку импульсный сигнал переводит систему в состояние b. Аддитивность влияний исходного начального состояния и состояния, в которое систему по истечении некоторого любого конечного времени идентификации импульсный сигнал переводит, позволяет рассматривать общие уравнения идентификации систем по нескольким запускам процесса, которые аналогичны автономному случаю, но оперируют указанной составной матрицей. Доказательство окончено.

Если вектор состояния доступен непосредственному измерению при любом управлении, то есть, уравнения выхода отсутствуют, можно говорить об идентифицируемости пары $((A,b),x_0)$ с точностью до всех параметров при условии, что Rank $[W\ W_c]=n$. У автономных систем имеем Rank $W=n$.

Нестационарные системы. Если характер нестационарности неизвестен, параметры нестационарной линейной динамической системы восстановить невозможно, поскольку уравнения по одной точке процесса заведомо неразрешимы. В данном случае имеет смысл указать на смысл грамиана идентифицируемости, аналогичному грамианам управляемости и наблюдаемости. В стационарном случае все более или менее прозрачно - все равно, что проверять, грамиан или системную матрицу.

Обыденная постановка задачи идентификации предусматривает попытку описания автономной системы с нестационарными параметрами автономной стационарной системой, причем грамиан связывает между собой параметры обоих систем, интеграл от нормы невязки фазовых скоростей которых на участке идентификации минимален. Это свойство можно положить в основу определения квазиидентифицируемости (как бы идентифицируемости), и тогда невырожденность грамиана будет гарантировать также, как и в тривиальном случае рассмотрения стационарных систем, однозначную разрешимость задачи. Квазиидентифицируемость подразумевается в задачах на восстановление медленно изменяющихся параметров, но есть ньюансы.

Квазиидентифицируемость вовсе не гарантирует близость параметров нестационарной и стационарной систем. Она гарантирует едиственность восстановления. Существуют контрпримеры, показывающие, что на классе нестационарных систем с гармоническими процессами, аналитически точно описываемыми стационарными уравнениями, "замороженные" параметры далеки от параметров стационарной системы. В таких случаях алгоритмы идентификации приводят к странным, на первый взгляд, результатам, поскольку их оценки однозначны и не меняются, а решение лежит в стороне от ожидаемого при сколь угодно медленном темпе изменения параметров. Эта особенность нестационарных систем поясняет, почему бессмысленно приводить графики "отслеживания" параметров.

Подведем некоторый итог. **Управляемость.** Понятие наблюдаемости и дуальное ему понятие управляемости были впервые введены Калманом в 1960 г. Хотя при обсуждении методов идентификации понятие наблюдаемости важнее понятия управляемости, оба они ввиду их дуальности рассматриваются совместно.

Говорят, что система является управляемой, если она может быть переведена из любого состояния $x(t_o)$ при $t=t$o в любое другое желаемое состояние $x(t_i)$ за конечный интервал времени τ ($\tau= t_i - t_o$) путем приложения кусочно-непрерывного входного воздействия/

Система является **неуправляемой**, если управляющее входное воздействие u(t) влияет не на все переменные состояния.

Кроме того, управляемая замкнутая линейная система может иметь произвольные собственные значения независимо от собственных значений соответствующей разомкнутой системы.

В литературе описаны критерии анализа управляемости (и соответственно наблюдаемости) систем. Все они основаны на рассмотрении канонического уравнения состояния и на полиномиальном разложении $e^{м}$.

Наблюдаемость. Понятие наблюдаемости дополняет понятие управляемости. Если управляемость требует, чтобы каждое состояние системы было чувствительно к воздействию входного сигнала, то наблюдаемость требует, чтобы каждое состояние системы влияло на измеряемый выходной сигнал.

Система наблюдаема, если все ее состояние можно непосредственно или косвенно определить по выходному вектору системы. Поэтому, когда определенное состояние (или изменение этого состояния) не влияет на выходной вектор, система **ненаблюдаема,** точно так же как отсутствие влияния вектора выходного сигнала на определенное состояние означает, что система неуправляема. Кроме того, ненаблюдаемая система не может быть идентифицирована; в терминах ее полной модели в пространстве состояний, очевидно, невозможна идентификация параметров, относящихся к ненаблюдаемым состояниям.

Основная литература

1. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 1979
2. Эйкхофф П. Основа идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975.

Дополнительная литература

3. Семенов А. Д., Артамонов Д. В., Брюхачев А. В. Идентификация объектов управления: Учебн. пособие. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003.- 211 с